آزمون نسبت درستنمائی تعمیم یافته وتواناترین آزمون یکنواخت

دیوید بیرکز

ترجمه و توضیح: رسول احمدی

چکیده:

در این یادداشت رابطه بین آزمونهای درستنمائی تعمیم یافته (GLRT) وتواناترین آزمونهای یکنواخت (UMPT) مورد بررسی قرار می گیرد. برای آزمون فرض یک طرفه در خانواده توزیع یک پارامتری، آزمون درستنمائی تعمیم یافته تحت خواص یکنوائی با تواناترین آزمون یکنواخت (UMPT) منطبق می شود. برابری GLRT و UMPT برای خانواده توزیعهای نمائی تک پارامتری برقرار است. در پایان رابطه بین GLRT و UMPUT ها (تواناترین آزمون یکنواخت نااریب) مورد توجه قرار می گیرد.

کلمات کلیدی:خانواده نمائی،خاصیت نسبت درستنمائی یکنوا(MLR) ، آزمون نااریب

1). مقدمه:

ابتدا در مبحث آمار ریاضی 1974) مود،گریبیل وبوز [8] یا 1987) باین وانگلهارد [2] مفاهیمی از به طور یکنواخت تواناترین آزمونها و آزمونهای درستنمائی تعمیم یافته ارائه دادند. در این مقاله ارتباط بین این دو مفهوم بررسی می شود.

زمانی که آزمون GLR را برای فرضهائی که آزمون UMP برای آنها وجود دارد بدست می آوریم ؛ انتظار داریم آزمون GLR با آزمون UMP منطبق باشد، در صورتی که در حالت فرض ساده

در مقابل فرض ساده نیز این امر احتیاج به شرط خاصی دارد که به وسیله [**5**] کندال واستوارت (1979) بیان شده است و آنرا در مثال **(1)** بیان می کنیم،در قسمت (2) نشان می دهیم که این انطباق برای فرضهای یک طرفه در خانواده توزیعهای یک پارامتری تحت شرایط خاص برقرار است،در قسمت (3) برابری آزمونهای GLR و UMP را برای حالت خاص خانواده توزیعهای نمائی تک پارامتری نشان می دهیم،در قسمت (4) مثالهائی از این انطباق برای توزیعهائی که متعلق به این خانواده نیستند ارائه می دهیم ودرقسمت (5) به رابطه بین آزمونهای GLR و UMPU برای فرضهای دو طرفه می پردازیم.

فرض می کنیم که **x_1 ، x_2 ، x_3 ،...،x_n** یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال (Pdf) یا تابع جرم احتمال (Pmf) ؛ $f(x;\theta)$ باشد که در آن θ به فضای پارامتر ($\theta \in \Omega$) متعلق است ، همچنین فرض می کنیم آمارهً بسنده $T(x_1, x_2, ... x_n)$ وجود دارد ؛ طبق اصل فاکتور گیری تابع درستنمائی تنها از طریق آماره بسنده به داده ها بستگی دارد، بنابراین تابع درستنمائی را به عنوان تابعی از T با $L(\theta;t)$ نشان می دهیم.

فرض یک طرفه $H_0: \theta \le b$ را در مقابل $H_1: \theta > b$ در نظر می گیریم.با در نظر گرفتن $\theta_1 > b$ ،طبق لم نیمن-پیرسون تواناترین آزمون برای فرض $H_0: \theta = b$ در مقابل $H_1: \theta = \theta_1$ آزمونی است که فرض H_0 را برای مقادیر بزرگ نسبت درستنمائی :

$$R_s(t) = \frac{L(\theta_1;t)}{L(b;t)}$$

رد می کند.

برای آزمودن فرض مرکب $H_0: \theta \le b$ در مقابل $H_1: \theta > b$ ،نسبت درستنمائی $R_s(t)$ به نسبت

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{\sup_{\theta_1 \in \Omega_1} L(\theta_1;t)}{\sup_{\theta_0 \in \Omega_0} L(\theta_0;t)}$$

که در آن $\Omega_0 = \{\theta \in \Omega : \theta \le b\}$ و $\Omega_1 = \{\theta \in \Omega : \theta > b\}$ تعمیم داده می شود.به عنوان یک آماره آزمون این نسبت کاملاّ معادل با نسبت

$$R_g(t) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta;t)}{\sup_{\theta_0 \in \Omega_0} L(\theta_0;t)}$$

است.

در اینجا برای اختصار $\sup_{\theta\in\Omega} L(\theta;t)$ را که برآوردگر درستنمائی ماکزیمم (MLE) θ درحالت کامل ($\theta\in\Omega$) با $\hat{\theta}(t)$ و $\sup_{\theta_0\in\Omega_0} L(\theta_0;t)$ را که برآوردگر درستنمائی ماکزیمم θ درحالت فرض صفر ($\theta\in\Omega_0$) می باشد با $\hat{\theta}_0(t)$ نشان می دهیم یعنی

$$R_g(t)=\frac{L(\hat{\theta}(t);t)}{L(\hat{\theta}_0(t);t)}$$

عکس $R_g(t)$ نسبت درستنمائی تعمیم یافته نامیده می شود.آزمونی با ناحیه رد به شکل $\{t:R_g(t)>c\}$ یا $\{t:R_g(t)\geq c\}$ آزمون GLR نامیده می شود.[اگر $R_g(t)$ یک متغیر تصادفی پیوسته تحت همهٔ مقادیر θ باشد پس ناحیه رد $\{t:R_g(t)>c\}$ و $\{t:R_g(t)\geq c\}$ معادل هستند ؛ زیرا آنها تحت همهٔ مقادیر θ دارای احتمال یکسان هستند.اگر $R_g(t)$ یک متغیر تصادفی گسسته با دامنه ای که به θ بستگی ندارد باشد آنگاه هر ناحیه رد به شکل $\{t:R_g(t)>c\}$ را می توان به شکل $\{t:R_g(t)\geq c'\}$ برای یک c' مناسب که $c'>c$ است نوشت].

مثال (1) : در آزمون فرض ساده $H_0:L=L_0$ در مقابل $H_1:L=L_1$ نشان می دهیم ؛ زمانی آزمون GLR با آماره $\lambda(\underline{x})=\frac{\max(L_0,L_1)}{L_0}=\max(1,\frac{L_1}{L_0})$ با آزمون نیمن ـ پیرسون با آماره $R_s(t)=\frac{L_1}{L_0}$ برابر است که $P(L_1>L_0)\geq\alpha$ باشد وزمانی این دو آزمون بر هم منطبق نمی شوند که $P(L_0\geq L_1)>1-\alpha>0$

حل : می دانیم تابع آزمونGLR به صورت

$$\phi_G(\underline{x})=\begin{cases}1 & \lambda(\underline{x})\geq c_\alpha\\ 0 & \lambda(\underline{x})<c_\alpha\end{cases}$$

و تابع آزمون نیمنـ پیرسون به صورت

$$\phi_S(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_0} > k_\alpha \\ \gamma & \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_0} = k_\alpha \\ 0 & \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_0} < k_\alpha \end{cases}$$

می باشد ؛ با توجه به اینکه $\lambda(\underline{x}) = \max(1, \frac{L_1}{L_0})$ بنابراین دو حالت اتفاق می افتد

(الف) $\lambda(\underline{x}) = \frac{L_1}{L_0}$ ؛ (ب) $\lambda(\underline{x}) = 1$

اگر $\lambda(\underline{x}) = \frac{L_1}{L_0}$ در نتیجه $\frac{L_1}{L_0} \geq 1$ و با در نظر گرفتن اینکه ناحیه رد آزمون GLR به صورت $\{\underline{x}: \lambda(\underline{x}) > c_\alpha\}$ می باشد ؛ اگر $c_\alpha < 1$ باشد آن گاه اندازه آزمون برابر یک است و با آزمون نیمن پیرسون در اندازه یک برابر است.اگر $c_\alpha = \infty$ باشد اندازه آزمون برابر صفر است و با آزمون نیمن ــ پیرسون در اندازه صفر برابر است.حال اگر $1 < c_\alpha < \infty$ باشد دو حالت اتفاق می افتد

1) $P(\frac{L_1}{L_0} > c_\alpha) = \alpha$

در این حالت با قرار دادن $k_\alpha = c_\alpha$ و $\gamma = 0$ این دو آزمون با هم برابرند ؛ می دانیم $1 < c_\alpha$ در نتیجه

$$\alpha = P(\frac{L_1}{L_0} > c_\alpha) \leq P(\frac{L_1}{L_0} > 1) \qquad \Rightarrow \qquad P(L_1 > L_0) \geq \alpha$$

بنابراین زمانی این دو آزمون بر هم منطبق هستند که

$$P(L_1 > L_0) \geq \alpha$$

حالت دوّم

2) $P(\frac{L_1}{L_0} > c_\alpha) < \alpha$

در این حالت آزمون GLR در اندازه α وجود ندارد وبنابراین با آزمون نیمن ــ پیرسون انطباق ندارد

$$\Rightarrow \ \mathrm{P}(\mathrm{L}_1 > \mathrm{L}_0) < \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P(L_0 \geq L_1) \geq 1-\alpha > 0$$

اگر $\lambda(\underline{x})=1$ در نتیجه آزمون GLR تنها برای دو اندازه صفر و یک وجود دارد.

▲

درقسمت بعدی شرایطی را که تحت آنها آزمون GLR با آزمون UMP معادل است ؛ بررسی می شود.

2). قضایا:

فرضهای زیر را برای تابع درستنمائی در نظر می گیریم.

فرض(1):اگر $\theta_0 < \theta_1$ پس $R_s(t)=\dfrac{L(\theta_1;t)}{L(\theta_0;t)}$ یک تابع غیر نزولی از **t** ،برای **t** هائی است که حداقل $L(\theta_0;t)>0$ یا $L(\theta_1;t)>0$.

این خاصیت ،خاصیت نسبت درستنمائی یکنوا(MLR)است .قضیه زیر را که یکی از قضایای مشهور آمار است داریم.[**2**]،[**8**]،[**7**]

قضیه (1): اگر فرض(**1**) برقرار باشد،آزمونی با ناحیه بحرانی $\{t:t>k\}$ یا $\{t:t\geq k\}$ تواناترین آزمون یکنواخت در اندازه اش برای آزمودن فرض $H_0:\theta\leq b$ در مقابل $H_1:\theta>b$ می باشد.

اگر بتوانیم نشان دهیم $R_g(t)=\dfrac{L(\hat{\theta}(t);t)}{L(\hat{\theta}_0(t);t)}$ یک تابع غیر نزولی از t است ،بنابراین نشان داده ایم که آزمون GLR یک UMP است.اگر چه این دقیقا صحیح نیست،یک نتیجه نزدیک این می تواند اثبات شود.

لم (1): اگر فرض (**1**) برقرار باشد.پس نسبت $R_a(t)=\dfrac{L(\hat{\theta}(t);t)}{L(b;t)}$ یک تابع غیر نزولی ازt برایT های است که $\hat{\theta}(t)\geq b$ می باشد.

اثبات :

طبق فرض $\hat{\theta}(t_1) \geq b$ ؛ اگر $t_1 < t_2$ باشد می خواهیم نشان دهیم $R_a(t_1) \leq R_a(t_2)$. با قرار دادن $\theta_1 = \hat{\theta}(t_1)$ و $\theta_0 = b$ در فرض **(1)** داریم

$$R_a(t_1) = \frac{L(\hat{\theta}(t_1);t_1)}{L(b;t_1)} \leq \frac{L(\hat{\theta}(t_1);t_2)}{L(b;t_2)}$$

با توجه به اینکه $\hat{\theta}(t_2)$ برآوردگر درستنمائی ماکزیمم θ به ازای مشاهده t_2 است بنابراین داریم $L(\hat{\theta}(t_1);t_2) \leq L(\hat{\theta}(t_2);t_2)$ در نتیجه

$$\frac{L(\hat{\theta}(t_1);t_2)}{L(b;t_2)} \leq \frac{L(\hat{\theta}(t_2);t_2)}{L(b;t_2)}$$

و نشان داده ایم $R_a(t_1) \leq R_a(t_2)$

▲

ما در واقع به $R_g(t)$ بیشتر از $R_a(t)$ علاقه مند هستیم.امّا باید توجه کرداین دو زمانی که $\hat{\theta}_0(t) = b$ باشد ، با هم برابرند .بنابراین فرض زیر را در نظر می گیریم.

فرض (2): $L(\theta;t)$ یک تابع غیر نزولی از θ برای θهائی است که $\theta < \hat{\theta}(t)$ می باشد.

لم (2) : اگر فرض **(2)** برقرار باشد بنابراین $\hat{\theta}_0(t) = \min[b, \hat{\theta}(t)]$.

اثبات :

اگر $\hat{\theta}(t) \leq b$ باشد، در نتیجه $\sup_{\theta\in\Omega_0} L(\theta;t) = \sup_{\theta\leq b} L(\theta;t) = L(\hat{\theta}(t);t)$

بنابراین $\hat{\theta}_0(t) = \hat{\theta}(t) = \min[b, \hat{\theta}(t)]$

اگر $\hat{\theta}(t) > b$ باشد پس با توجه به فرض (2) ، $L(\theta;t)$ یک تابع غیر نزولی از θ برای θهائی است که $\theta \leq b$ باشد، بنابراین $\sup_{\theta\in\Omega_0} L(\theta;t) = \sup_{\theta\leq b} L(\theta;t) = L(b;t)$

در نتیجه $\hat{\theta}_0(t) = b = \min[b, \hat{\theta}(t)]$

▲

لم (2) بیان می کند که اگر $\hat{\theta}(t) \leq b$ باشد آن گاه $R_g(t) = 1$ واگر $\hat{\theta}(t) > b$ باشد در نتیجه $R_g(t) = R_a(t) \geq 1$.توجه کنید که ناحیه رد آزمون GLR ، $\{t : R_g(t) > k'\}$ است و بنابراین اگر $R_g(t) = 1$ باشد اندازه آزمون برابر با **(1)** می شود که آزمونی غیر مفید است. حالا $k' \geq 1$ در نظر می گیریم و ناحیه رد را به صورت

$$\{t : \hat{\theta}(t) > b, R_a(t) > k'\} \qquad (*)$$

می شود .توجه کنید که اگر $r(t)$ تابعی غیر نزولی از t باشد آنگاه $\{t : r(t) > c\}$ را می توان به صورت $\{t : t > c'\}$ یا $\{t : t \geq c'\}$ برای یک c' مناسب بیان کرد ؛ بنابراین و با توجه به لم (1) که در آن به غیر نزولی بودن $R_a(t)$ اشاره شده است ؛ ناحیه رد (*) را می توان به صورت

$$\{t : \hat{\theta}(t) > b, t > k''\} \text{ یا } \{t : \hat{\theta}(t) > b, t \geq k''\} \qquad (**)$$

بیان کرد. این نتیجه برای ناحیه رد GLR یعنی $\{t : R_g(t) \geq k'\}$ برقرار است.حالا فرض زیر را در نظر می گیریم.

فرض (3) : $\hat{\theta}(t)$ یک تابع غیر نزولی از **t** است

با استفاده از فرض (3) ناحیه رد (**) به صورت $\{t : t > k''\}$ یا $\{t : t \geq k''\}$ بدست می آید.با استفاده از قضیه (1)،چنین ناحیه ردی یک UMP است ؛ بنابراین قضیه زیر را بیان می کنیم.

قضیه (2): اگر x_1، x_2، x_3، ...،x_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x;\theta)$ که در آن θ یک پارامتر حقیقی است و $T(x_1, x_2, ... x_n)$ آماره بسنده و فرضهای (1)،(2)و(3) برقرار باشد آنگاه آزمونGLR از فرض $H_0 : \theta \leq b$ در مقابل $H_1 : \theta > b$ یک آزمونUMP در اندازه اش است.

فرض('2) : $L(\theta;t)$ یک تابع غیر صعودی از θبرای θهائی است که $\theta > \hat{\theta}(t)$ می باشد.

نکته (1) : به طور مشابه برای مسئله دوگانه از آزمون فرض $H_0 : \theta \geq b$ در مقابل $H_1 : \theta < b$ ؛ اگر فرض کنیم که فرضهای (1)،('2)و(3) برقرار است.آن گاه آزمون GLR یک آزمون UMP در اندازه اش است.

نکته (2) :تحت فرضهای (1)،(2)و(3)،ناحیه رد آزمون GLR می تواند به صورت $\{t : t > k\}$ یا $\{t : t \geq k\}$ نوشته شود .امّا عکس این لزوماً درست نیست.به معنی اینکه یک ناحیه رد به صورت $\{t : t > k\}$ ممکن است یک آزمون GLR نباشد ؛ برای مثال خانواده توزیع یکنواخت بر $[0,\theta]$ را در نظر بگیرید (به مثال (2)قسمت (4)نگاه کنید) ؛ آماره $R_g(t)$ تنها دو مقدار ،یک وقتی که $t \leq b$ و ∞ وقتی $t > b$ را می گیرد ؛ بنابراین ، تنها ناحیه بحرانی قابل حصول تمام فضای نمونه است ودر این حالت اندازه آزمون یک است و $\{t : t > b\}$ دارای اندازه صفر است.

نکته (3) : فرضهای (1)،(2)و(3) شامل یکنوائی هستند.توجه کنید که خانواده توزیع یکنواختِ که در نکته (2) بیان شد ، در فرضهای (1) و(2) دارای یکنوای اکید نیست.حالا خانواده ای از توزیعها را در نظر می گیریم که فرضهای (1)،(2) و(3) با یکنوای اکید برای آن بر قرار است ؛ بنابراین ناحیه بحرانی به

شکل $\{t : t > k\}$ یک آزمون GLR-UMP تعریف می کند به شرط اینکه $\hat{\theta}(t) > b$. در مجموع طبق فرض (3) ، هر ناحیه بحرانی به شکل $\{t : \hat{\theta}(t) > b\}$ یک آزمون GLR-UMP تعریف می کند به شرط اینکه $b^* > b$.

3). خانواده های نمائی تک پارامتری:

فرض کنید که تابع چگالی $f(x;\theta)$ متعلق به خانواده نمائی تک پارامتری به شکل

$$f(x;\theta) = a(\theta)b(x)\exp[c(\theta)d(x)]$$

باشدوهمچنین فرض کنید که $c(\theta)$ تابعی اکیداً صعودی ومشتق پذیر بر حسب θ باشد ؛ این فراهم می کند که $a(\theta)$ نیز مشتق پذیر باشد. [7] آماره $T(x_1, x_2, ... x_n) = \dfrac{\sum_i^n d(x_i)}{n}$ یک آماره بسنده است.تابع درستنمائی **T** را میتوان به صورت

$$L(\theta;t) = \exp[nc(\theta) - nA(\theta)]$$

که در آن $A(\theta) = -\ln a(\theta)$ نوشت. حالا باید نشان دهیم که فرضهای (1)،(2)و(3) برای این خانواده ازتوابع برقراراست و در نتیجه قضیه **(**2**)** برای این خانواده صادق است. فرض 1 برقرار است.حال باید نشان دهیم که فرض **(**2**)**و(3**)** برقرار است. در ابتدا مناسب است بعضی روابط میان $c(\theta)$ ، $A(\theta)$ و $d(x)$ را مورد بررسی قرار دهیم.[**3**]،[**6**]

لم (3): اگر $g(\theta) = E_\theta[d(x)]$ و $v(\theta) = \mathrm{var}_\theta[d(x)]$

بنابراین

a) $A'(\theta) = c'(\theta)g(\theta)$

b) $g'(\theta) = c'(\theta)v(\theta)$

اثبات :

فرض می کنیم μ اندازه متناظر با تابع چگالی $f(x;\theta)$ باشد ؛

a)از عبارت $1 = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)d\mu(x)$ نسبت به θ مشتق می گیریم ؛

$$0 = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)d\mu(x)$$

می دانیم

$$f(x;\theta)=\exp[c(\theta)d(x)-A(\theta)+s(x)]$$

بنابراین

$$\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}=[c'(\theta)d(x)-A'(\theta)]f(x;\theta)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}0&=\int[c'(\theta)d(x)-A'(\theta)]f(x;\theta)d\mu(x)\\&=c'(\theta)E_\theta[d(x)]-A'(\theta)=c'(\theta)g(\theta)-A'(\theta)\\\Rightarrow A'(\theta)&=c'(\theta)g(\theta)\end{aligned}$$

b)از عبارت $g(\theta)=\int d(x)f(x;\theta)d\mu(x)$ نسبت به θ مشتق می گیریم.

$$\begin{aligned}g'(\theta)&=\int c'(\theta)[d(x)]^2 f(x;\theta)d\mu(x)-\int A'(\theta)d(x)f(x;\theta)d\mu(x)\\&=c'(\theta)[E_\theta[d(x)]^2]-A'(\theta)g(\theta)\\&=c'(\theta)[E[d(x)]^2]-[g(\theta)]^2]\\&=c'(\theta)v(\theta)\end{aligned}$$

▲

لم(4) : $g(\theta)$ یک تابع اکیداً صعودی از θ است.

اثبات :

با توجه به اینکه $g'(\theta)=c'(\theta)v(\theta)$ و از آنجائی که $c(\theta)$ یک تابع اکیداً صعودی است در نتیجه $c'(\theta)>0$ وحال با توجه به اینکه توزیعها برای تمام θ ها یکسان است و $d(x)$ ثابت نیست،بنابراین $v(\theta)>0$ و در نتیجه $g'(\theta)>0$ می باشد.

برآوردگردرستنمائی ماکزیمم θ برابر با $\hat{\theta}(t)$ است وآن مقداری از θ است که $L(\theta;t)$ را ماکزیمم می کند یا به طور معادل ، $\ln L(\theta;t)$ را ماکزیمم می کند.مشتق $\ln L(\theta;t)$ نسبت به θ برابر با

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;t)=nc'(\theta)t-nA'(\theta)=nc'(\theta)[t-g(\theta)]$$

که در $\theta=\hat{\theta}(t)$ این مشتق باید صفر شود.بنابراین لم زیر برقرار است.[لهمن (1983) صفحه 417]

لم (5) : $g(\hat{\theta}(t))=t$

حالا می توانیم نشان دهیم ؛ فرض **(2)** و **(3)** برقرار است.

پس با توجه به لم **(4)** و(5) $g(\theta) < g(\hat{\theta}(t)) = t$.بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;t) = nc'(\theta)[t - g(\theta)] > 0$$

و این نشان می دهد که شرط(2) برقرار است.

با توجه به لم (4) ، $g(\theta)$ یک تابع اکیداً صعودی از θ است ؛ بنابراین آن دارای تابع معکوس $g^{-1}(t)$ است که تابعی اکیداً صعودی از t است ؛ با توجه به لم (5) ، $\hat{\theta}(t) = g^{-1}(t)$ واین نشان می دهد که فرض **(3)** برقرار است. با توجه به آنچه گذشت یک آزمون GLR از فرض $H_0 : \theta \le b$ در مقابل $H_1 : \theta > b$ در خانواده توزیع نمائی تک پارامتری یک آزمون UMP در اندازه اش می باشد .

4).خانواده های دیگر:

توزیعهای دیگری به غیر از توزیعهای خانواده نمائی تک پارامتری وجود دارد که شرایط قضیه (2) برای آنها برقرار است.

مثال (2):توزیع یکنواخت بر $[0,\theta]$ دارای تابع چگالی $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(x)$ است ؛ که در آن I_A بر تابع مشخصه مجموعه A دلالت می کند ؛ آماره $T = \max[x_1, x_2, ..., x_n]$ ،آماره بسنده است و $L(\theta,t) = \theta^{-n} I_{[0,\theta]}(t)$. [تابع چکالی T برابر با $nt^{n-1}\theta^{-n} I_{[0,\theta]}(t)$ است.]حالا به بررسی وجود فرضهای (1)،(2)و(3) می پردازیم.

فرض **(1)**:باید نشان دهیم که $R_s(t) = \dfrac{L(\theta_1;t)}{L(\theta_0;t)}$ برای $\theta_0 < \theta_1$ یک تابع غیر نزولی از t است برای t هائی که $L(\theta_1;t) > 0$ یا $L(\theta_0;t) > 0$ باشد ؛اگر $\theta_0 < \theta_1$

$$\Rightarrow R_s(t) = \frac{L(\theta_1;t)}{L(\theta_0;t)} = (\frac{\theta_0}{\theta_1})^n \frac{I_{[0,\theta_1]}(t)}{I_{[0,\theta_0]}(t)} = \begin{cases} (\dfrac{\theta_0}{\theta_1})^n & \text{if } \ t < \theta_0 \\ \infty & \text{if } \ \theta_0 < t < \theta_1 \end{cases}$$

در نتیجه فرض **(1)** برقرار است.

فرض **(2)** :باید نشان دهیم $L(\theta;t)$ یک تابع غیر نزولی از θ برای θ هائی است که $\theta < \hat{\theta}(t)$ می باشد ؛ در این جا $\hat{\theta}(t) = t$ و $L(\theta;t) = \left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n I_{[0,\theta]}(t)$ اگر $\theta < t$

$$\Rightarrow L(\theta;t)=0$$

در نتیجه فرض **(2)** برقرار است.

فرض **(3)**: باید نشان دهیم $\hat{\theta}(t)$ یک تابع غیر نزولی از t است وبا توجه به اینکه $\hat{\theta}(t)=t$ است ، در نتیجه فرض **(3)** نیز برقرار است.

مثال (3): اگر **X** یک متغیر تصادفی از توزیع فوق هندسی با تابع چگالی

$f(x;\theta)=\dfrac{\binom{\theta}{x}\binom{M-\theta}{m-x}}{\binom{M}{m}}$ باشد. در اینجا $n=1$ است بنابراین $T=X$ آماره بسنده است و $L(\theta;x)=f(x;\theta)$. حالا به بررسی وجود فرضهای (1)،(2)و(3) می پردازیم

فرض (1) :برای بررسی برقراری این فرض ، نسبت $\dfrac{L(\theta+1;x)}{L(\theta;x)}$ را در نظر می گیریم ، داریم

$$\frac{L(\theta+1;x)}{L(\theta;x)}=\frac{\theta+1}{\theta+1-x}\,\frac{M-\theta-m+x}{M-\theta}$$

که تابعی غیر نزولی از x است.

فرض (2): برای نشان دادن اینکه فرض (2) برقرار است ، ابتدا برآوردگر درستنمائی ماکزیمم θ را بدست می آوریم ؛ برای این کار نسبت $\dfrac{L(\theta;x)}{L(\theta-1;x)}$ را بزرگتر از <u>1</u> <u>یک</u> قرار می دهیم ونتیجه می گیریم که این نسبت بزرگتر از <u>1</u> <u>یک</u> است اگر وتنها اگر $\theta<\dfrac{x(M+1)}{m}$ وبنابراین برآوردگر درستنمائی ماکزیمم θ برابر با جزء صحیح $\dfrac{x(M+1)}{m}$ می باشد.بنابراین فرض (2) برقرار است.

فرض (3) : برای نشان دادن اینکه فرض (3) برقرار است باید نشان دهیم که $\hat{\theta}(x)=\left[\dfrac{x(M+1)}{m}\right]$ یک تابع غیر نزولی از x است واین واضح است.

5) . فرضهای مقابل دو طرفه:

قضیه (2) مربوط به فرضهای مقابل یک طرفه بود ؛ امّا حالا می خواهیم که آزمون فرض $H_0:\theta=b$ را در مقابل $H_1:\theta\neq b$ برای خانواده نمائی تک پارامتری انجام دهیم ؛ در این حالت آزمون UMP وجود ندارد امّا آزمون UMPU وجود دارد.[**7**]

آیا یک آزمون GLR از $H_0:\theta=b$ در مقابل $H_1:\theta\neq b$ یک UMPU است.کندال و استوارت (1979)(صفحه 262)) می نویسد " اگر یک آزمون UMPU را جستجو کنیم روش GLR به وسیله اریبی کلی خودش در وضعیت نامناسب قرار می گیرد".یک برآوردگر درستنمائی ماکزیمم لزوماً یک برآوردگر نااریب نیست و بنابراین یک آزمون GLR نیز لزوماً آزمونی نااریب نیست.

فرض می کنیم که x_1، x_2، x_3، ...،x_n یک نمونه تصادفی از توزیع $f(x;\theta)$ که متعلق به خانواده نمائی تک پارامتری است ؛ باشد.تابع درستنمائی از آماره بسنده T برابر

$$L(\theta;t)=\exp[nc(\theta)t-nA(\theta)]$$

است ؛ فرض می کنیم که $c(\theta)$ یک تابع اکیداً صعودی از θ است ، بنابراین می توانیم $\xi=nc(\theta)$ قرار دهیم و در نتیجه $\theta=c^{-1}(\frac{\xi}{n})$ و $A(\theta)=A(c^{-1}(\frac{\xi}{n}))$ وبا قراردادن $B(\xi)=nA(c^{-1}(\frac{\xi}{n}))$ داریم

$$L(\xi;t)=\exp[t\xi-B(\xi)]$$

وفرض $H_0:\theta=b$ در مقابل $H_1:\theta\neq b$ به فرض $H_0:\xi=q$ در مقابل $H_1:\xi\neq q$ ،که در آن $q=nc(b)$ تبدیل می شود.

فرض می کنیم T یک متغیر تصادفی پیوسته است.در این حالت $\Pr[R_g(T)=c]=0$ ؛ [در اثبات لم (6) وقضیه(3) نشان داده می شود که $R_g(t)=k(\hat{\xi}(t))$ و $\hat{\xi}(t)$ اکیداً صعودی است و $k(\xi)$ تابعی اکیداً یکنوا برای $\xi<q$ و $\xi>q$ می باشد.] بنابراین تنها احتیاج داریم که به ناحیه بحرانیGLR به شکل $\{t:R_g(t)>c\}$ توجه کنیم.

لم (6):اگر $h(\xi)=E_\xi[T]$ و $k(\xi)=\frac{L(\xi;h(\xi))}{L(q;h(\xi))}$ ،آنگاه آزمون GLR دارای ناحیه بحرانی $\{t:\hat{\xi}(t)<q_1 \text{ or } \hat{\xi}(t)>q_2\}$ است که در آن $k(q_1)=k(q_2)$ ، $(q_1<q<q_2)$.

اثبات :

می دانیم

$$1=\int\exp[t\xi-B(\xi)]d\mu(t)$$

از طرفین نسبت به ξ مشتق می گیریم

$$0=\int(t-B'(\xi))L(\xi;t)d\mu(t)$$
$$0=E_\xi(T)-B'(\xi)\quad\Rightarrow\quad B'(\xi)=h(\xi)$$

و همچنین با توجه به فرض لم

$$h(\xi)=\int t\exp[\xi\, t-B(\xi)]d\mu(t)$$

نسبت به ξ مشتق می گیریم

$$h'(\xi)=\int t[t-B'(\xi)]L(\xi;t)d\mu(t)$$

$$=\int t^2L(\xi;t)d\mu(t)-B'(\xi)\int tL(\xi;t)d\mu(t)$$

$$=E_\xi(t^2)-B'(\xi)E_\xi(t)$$

$$=E_\xi(t^2)-[E_\xi(t)]^2=v_\xi(t)$$

و با توجه به اینکه t یک ثابت نیست، $v_\xi(t)>0$ و در نتیجه $h'(\xi)>0$.

برآوردگر درستنمائی ماکزیمم ξ یعنی $\hat{\xi}(t)$ را مد نظر قرار دهیم ؛ آن مقداری از ξ است که $L(\xi;t)$ را یا به طور معادل $\ln L(\xi;t)$ را ماکزیمم می کند ، بنابراین از $\ln L(\xi;t)$ نسبت به ξ مشتق می گیریم

$$\frac{\partial \ln L(\xi;t)}{\partial\xi}=t-B'(\xi)$$

که در $\xi=\hat{\xi}(t)$ برابر صفر می شود .با توجه به اینکه $B'(\xi)=h(\xi)$ داریم $h(\hat{\xi}(t))=t$ در نتیجه

$$k(\hat{\xi}(t))=\frac{L(\hat{\xi}(t);t)}{L(q;t)}$$

که آماره آزمون GLR است ؛ بنابراین ناحیه رد برای آزمون GLR ، $\{t:k(\hat{\xi}(t))>\mathrm{k}\}$ می باشدو

$$k(\xi)=\frac{L(\xi;h(\xi))}{L(q;h(\xi))}=\exp[(\xi-q)h(\xi)-B(\xi)+B(q)]$$

$$\ln k(\xi)=(\xi-q)h(\xi)-B(\xi)+B(q)$$

حال از طرفین نسبت به ξ مشتق می گیریم

$$\frac{\partial \ln k(\xi)}{\partial\xi}=h(\xi)+(\xi-q)h'(\xi)-B'(\xi)=(\xi-q)h'(\xi)$$

با توجه به اینکه $h'(\xi)$ همواره مثبت است بنابراین $k(\xi)$ برای $\xi>q$ ،اکیداً صعودی وبرای $\xi<q$ اکیداً نزولی می باشد ؛ در نتیجه ناحیه بحرانی $\{t:k(\hat{\xi}(t))>\mathrm{k}\}$ به صورت $\{t:\hat{\xi}(t)>q_2 \quad \text{or} \quad \hat{\xi}(t)<q_1\}$ در می آید و بنابراین اثبات کامل است.

▲

قضیه (3): اگر x_1، x_2، x_3، ...، x_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x;\theta)$ که دارای خاصیت نمائی تک پارامتری است ؛ باشد واگر T آماره بسنده این توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال

$$p(t;\xi) = L(\xi;t)\,j(t)$$

باشد و

$$M(\xi) = \frac{p(h(\xi);q)[h(\xi)-h(q)]}{\xi - q}$$

و $k(\xi)$ همان که در لم (6) در نظر گرفتیم،باشد .آزمونهای GLR (در همه اندازه ها) از فرض $H_0:\xi = q$ در مقابل $H_1:\xi \neq q$ ،UMPU است اگر و تنها اگر $M(\xi)$ یک تابع از $k(\xi)$ باشد.

اثبات :

ناحیه رد آزمون UMPU به صورت $\{t\ :\ t<c_1 \ \ \text{or}\ \ t>c_2\}$ می باشد که در آن

$$\int_{c_1}^{c_2}[t-h(q)]P(t;q)dt = 0$$

زیرا $E_q(T(x)\phi(x)) = E_q(T(x))\alpha$ [7] یعنی

$$\int_{-\infty}^{c_1} tp(t;q)dt + \int_{c_2}^{\infty} tp(t;q)dt = h(q)\alpha$$

و

$$h(q) = \int_{-\infty}^{\infty} tp(t;q)dt$$

در نتیجه

$$\int_{c_1}^{c_2} tp(t;q)dt = h(q)(1-\alpha)$$

و می دانیم

$$\int_{c_1}^{c_2} p(t;q)dt = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \int_{c_1}^{c_2}[t-h(q)]p(t;q)dt = 0$$

در لم (6) دیدیم که $h(\hat{\xi}(t)) = t$ و $h(\xi)$ یک تابع اکیداً صعودی است ؛ در نتیجه $\hat{\xi}(t) = h^{-1}(t)$ و $\hat{\xi}(t)$ تابعی اکیداً صعودی است ؛ بنابراین ناحیه رد آزمون UMPU به صورت

$\{t : \hat{\xi}(t) < \hat{\xi}(c_1) \ \text{ or } \ \hat{\xi}(t) > \hat{\xi}(c_2)\}$ در می آید.طبق لم (6) این ناحیه بحرانی،ناحیه بحرانی آزمون GLR است اگر $k(\hat{\xi}(c_2)) = k(\hat{\xi}(c_1))$ در نتیجه آزمون GLR با آزمون UMPU منطبق می شود اگر و تنها اگر $k(\hat{\xi}(c_2)) = k(\hat{\xi}(c_1))$. طبق تعریف شرطی c_1 و c_2 می توانند به عنوان $Q_1 = Q_2$ نوشته شوند ؛ که در آن $Q_1 = \int_{c_1}^{h(q)} [h(q) - t] p(t;q) dt$ و

$$Q_2 = \int_{h(q)}^{c_2} [t - h(q)] p(t;q) dt .$$

با توجه به اثبات لم (6) ، می دانیم که $k(\xi)$ تابعی اکیداً نزولی از $\hat{\xi}(c_1)$ تا q و تابعی اکیداً صعودی از q تا $\hat{\xi}(c_2)$ است. بنابراین برای هر کدام از این دو ناحیه k دارای تابع معکوس k_i^{-1} $(i = 1,2)$ می باشد . حال تغیر متغیر $u = k(\hat{\xi}(t))$ را در نظر می گیریم ؛ در نتیجه

$$\hat{\xi}(t) = k_i^{-1}(u)$$

و می دانیم $\hat{\xi}(t) = h^{-1}(t)$

در نتیجه

$$h^{-1}(t) = k_i^{-1}(u) \quad \Rightarrow t = h(k_i^{-1}(u)) = G_i(u)$$

و با توجه به اینکه $k(\xi)$ تابعی اکیداً نزولی از $\hat{\xi}(c_1)$ تا q می باشد ؛ بنابراین

$$c_1 < t < h(q)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\xi}(c_1) < \hat{\xi}(t) < q \qquad (\hat{\xi}(t) = h^{-1}(t))$$

$$1 = k(q) < u < k(\hat{\xi}(c_1))$$

وهمچنین با توجه به اینکه $k(\xi)$ تابعی اکیداً صعودی از q تا $\hat{\xi}(c_2)$ می باشد بنابراین

$$h(q) < t < c_2$$

$$\Rightarrow q < \hat{\xi}(t) < \hat{\xi}(c_2)$$

$$1 = k(q) < u < k(\hat{\xi}(c_2))$$

در نتیجه

$$Q_i = \int_1^{k(\hat{\xi}(c_i))} [G_i(u) - h(q)] p(G_i(u);q) G_i'(u) du$$

طبق آنچه گذشت می دانیم آزمونهای GLR و UMPU منطبق هستند اگر و تنها اگر $k(\hat{\xi}(c_2)) = k(\hat{\xi}(c_1))$ واین تساوی معادل است با شرط $Q_1 = Q_2$ و این معادل بودن برای همه اندازه ها بر قرار است اگر و تنها اگر

$$[G_1(u)-h(q)]p(G_1(u);q)G_1'(u) = [G_2(u)-h(q)]p(G_2(u);q)G_2'(u) \qquad (***)$$

برای همه u ها.

می دانیم که $G_i'(u) = \dfrac{\partial h(k_i^{-1}(u))}{\partial u} = \dfrac{h'(k_i^{-1}(u))}{k'(k_i^{-1}(u))}$

و با توجه به اثبات لم (6) می دانیم $k'(\xi) = (\xi - q)h'(\xi)k(\xi)$ بنابراین با جایگذاری داریم

$$G_i'(u) = \frac{1}{[(k_i^{-1}(u)-q)u]}$$

اکنون برای هر u قرار می دهیم $w_i = k_i^{-1}(u) \quad (i=1,2)$

در نتیجه

$$u = k_i(w_i) \quad (i=1,2)$$

و

$$G_i(u) = h(w_i) \qquad (i=1,2)$$

در نتیجه معادله (***) به صورت

$$\frac{[h(w_1)-h(q)]p(h(w_1);q)}{(w_1-q)k_1(w_1)} = \frac{[h(w_2)-h(q)]p(h(w_2);q)}{(w_2-q)k_2(w_2)}$$

ودر نتیجه به صورت

$$\frac{M(w_1)}{k_1(w_1)} = \frac{M(w_2)}{k_2(w_2)}$$

می شود هر جائی که $k(w_1) = k(w_2)$ ؛ به عبارت دیگر ، معادله (***) برقرار است اگر و تنها اگر $M(\xi)$ تابعی از $k(\xi)$ باشد .

▲

نکته (4) :از اثبات ارائه شده چنین بر می آید که یک آزمون GLR از $H_0 : \theta = b$ در مقابل $H_1 : \theta \neq b$ یک آزمون UMPU است ،اگر و تنها اگر نااریب باشد .

با استفاده از قضیه (3) یک آزمون GLR (در هر اندازه) از فرض $H_0 : \theta = b$ در مقابل $H_1 : \theta \neq b$ در سه حالت زیر یک آزمون UMPU است:

1). اگر θ میانگین یک توزیع نرمال با واریانس مشخص باشد.

2). اگر θ واریانس یک توزیع نرمال با میانگین مشخص باشد.

3). اگر θ یک پارامتر مقیاس در یک توزیع گاما با پارامتر شکل مشخص باشد.

امّا زمانی که θ یک پارامتر شکل در یک توزیع گاما با پارامتر مقیاس مشخص باشد یک آزمون GLR ممکن استUMPU نباشد.به مثال زیر توجه کنید.

مثال(4):اگر X یک مشاهده تنها از توزیع گاما با پارامتر شکل α وپارامتر مقیاس یک(1) باشد ؛ آماره بسنده آن $T=\ln x$ با توزیع

$$p(t;\alpha)=\exp[\alpha t-\ln\Gamma(\alpha)]\exp[-\exp(t)]$$

است میانگین T برابر با $h(\alpha)=\psi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\ln\Gamma(\alpha)$ ؛ مشتق تابع گاما می باشد . $k(\alpha)$ تابعی یک به یک از $\tilde{k}(\alpha)=(\alpha-q)\psi(\alpha)-\ln\Gamma(\alpha)$ و $M(\alpha)$ یک ثابت چندگانه از

$$\tilde{M}(\alpha)=\frac{\exp[q\psi(\alpha)-\exp[\psi(\alpha)]](\psi(\alpha)-\psi(q))}{\alpha-q}$$

می باشد . برای نشان دادن اینکه آزمون GLR لزوماً UMPU نیست ، باید q ،α_1 و α_2 را طوری در نظر بگیریم که $\tilde{k}(\alpha_1)=\tilde{k}(\alpha_2)$ امّا $\tilde{M}(\alpha_1)\neq\tilde{M}(\alpha_2)$.اگر $q=2-\gamma$ که در آن $\gamma=.5772$ ثابت اُلِرز است و $\alpha_1=1$ و $\alpha_2=2$. از مقادیر $\Gamma(1)=1$ ، $\Gamma(2)=1$ و $\psi(1)=-\gamma$ ، $\psi(2)=1-\gamma$ و $\psi(q)\approx-/0383$. [1] در این حالت $\tilde{k}(1)=\tilde{k}(2)=\gamma(1-\gamma)$ بدست می آید امّا $\tilde{M}(1)\approx.32$ و $\tilde{M}(2)\approx.317$.

REFERENCES:

[1]: Abramowitz, M. , and Stegun ,I.A.(eds.) (1966),Handbook of Mathematical Functions (5 th printing) , Washington ,DC : National Burean of Standards.

[2] : Bain ,L. J. ,and Engelhardt ,M. (1987) , Introduction to Probability and Mathematical Statistics , Boston: Duxbury press.

[3] : Johnson , R . A., Ladalla, J., and Liu, S .T. (1979),”Differential Relation, in the Original Parameters, Which Determine the First Two Moments of the Multi-parameter Exponential Family,”The Annals of Statistics, 7, 232-235.

[4] : Karlin ,S.(1958), “Polya Type Distributions IV: Some Principles of Selecting a Single Procedure From a Complete Class,” The Annals of Mathematical Statistics , 29,1-21.

[5] : Kendal , M. , and Stuart , A.(1979),The Advanced Theory of Statistics (Vol. 2 ,4 th ed.),London: Charles W . Griffin.

[6] : Lehmann, E. L. (1983) , Theory of Point Estimation , New York : John Wiley

[7] : Lehmann, E. L. (1986), Testing Statistical Hypotheses (2 nd.) , New York : John Wiley

[8] : Mood , A .M. , Graybill ,F.A.,and Boes, D. C.(1974), Introduction to the Theory of Statistics (3 rd ed.),New York: McGraw-Hill.